TEM®

INOVANCE

Drives & Motion Control

Programación en PLC

Derivada de una señal respecto al tiempo usando diferencia finitas parte 1

Usos del algoritmo:

- Calcular la velocidad de un cuerpo del cual conocemos su posición a través de un encóder. Si derivamos la señal proveniente del encóder, tendremos la velocidad del cuerpo
- Preparar herramientas para la creación de un PID. La parte derivativa del PID se creará a partir del algoritmo aquí expuesto.
- Las técnicas aquí utilizadas, podrán usarse también para la creación de filtros.

Para la creación de un FB para el cálculo de la derivada de una señal, debemos tener en cuenta:

- En CoDeSys-InoSopPro, el código se ejecuta a intervalos de tiempo cíclicos y deterministas. (P. Ej, el código se ejecuta exactamente cada 5 ms, con una posible variación del orden de los microsegundos).
- Los valores de las señales de entrada, también se capturan a intervalos regulares. La ejecución de la captura de entradas es aún más determinista que la ejecución del código, pudiendo estar la variación en el orden de ns cuando se trabaja en ethercat.
- El control de los ciclos de ejecución del programa y del refresco de las entradas y salidas, se gestionan a través del TaskManager.

Derivada de una señal mediante diferencias finitas

La derivada mediante diferencias finitas de una señal “v” respecto al tiempo sería:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_i) - v(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

El valor de la derivada de la señal en el el ciclo “i” és:

$$f'(v_i) = \frac{v(t_i) - v(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

Siendo:

- $f'(v_i)$ Valor de la derivada de la señal v en el ciclo de tarea .
- $v(t_i)$ És el valor de la señal en el ciclo de tarea actual.
- $v(t_{i-1})$ És el valor de la señal en el ciclo de tarea anterior
- t_i-t_{i-1} És la diferencia del tiempo transcurrido entre la captura de las dos señales (Suele equivaler al tiempo de ciclo de la tarea en la que se ejecuta el código).

Derivada de una señal mediante diferencias finitas

Quedando en el código de la siguiente forma:

```
FUNCTION_BLOCK FB_Derivative
VAR_INPUT
    in:LREAL;
    tCycle:LREAL;
END_VAR
VAR_OUTPUT
    out:LREAL;
END_VAR
VAR
    in_1:LREAL;
END_VAR

```

```
IF tCycle<>0 THEN
    out:=(in-in_1)/tCycle;
ELSE
    out:=in;
END_IF

in_1:=in;
```

Derivada de una señal respecto al tiempo

Para comprobae el algoritmo, usaremos la Relación Pitaagórica.

Sabemos que:

$$f'(\sin(wt)) = w * \cos(wt)$$

Por tanto, si dividimos la señal derivada por omega podremos tener la señal cosenoidal:

$$\cos(wt) = f'(\sin(wt))/w$$

Además, conociendo la Relación Pitagórica:

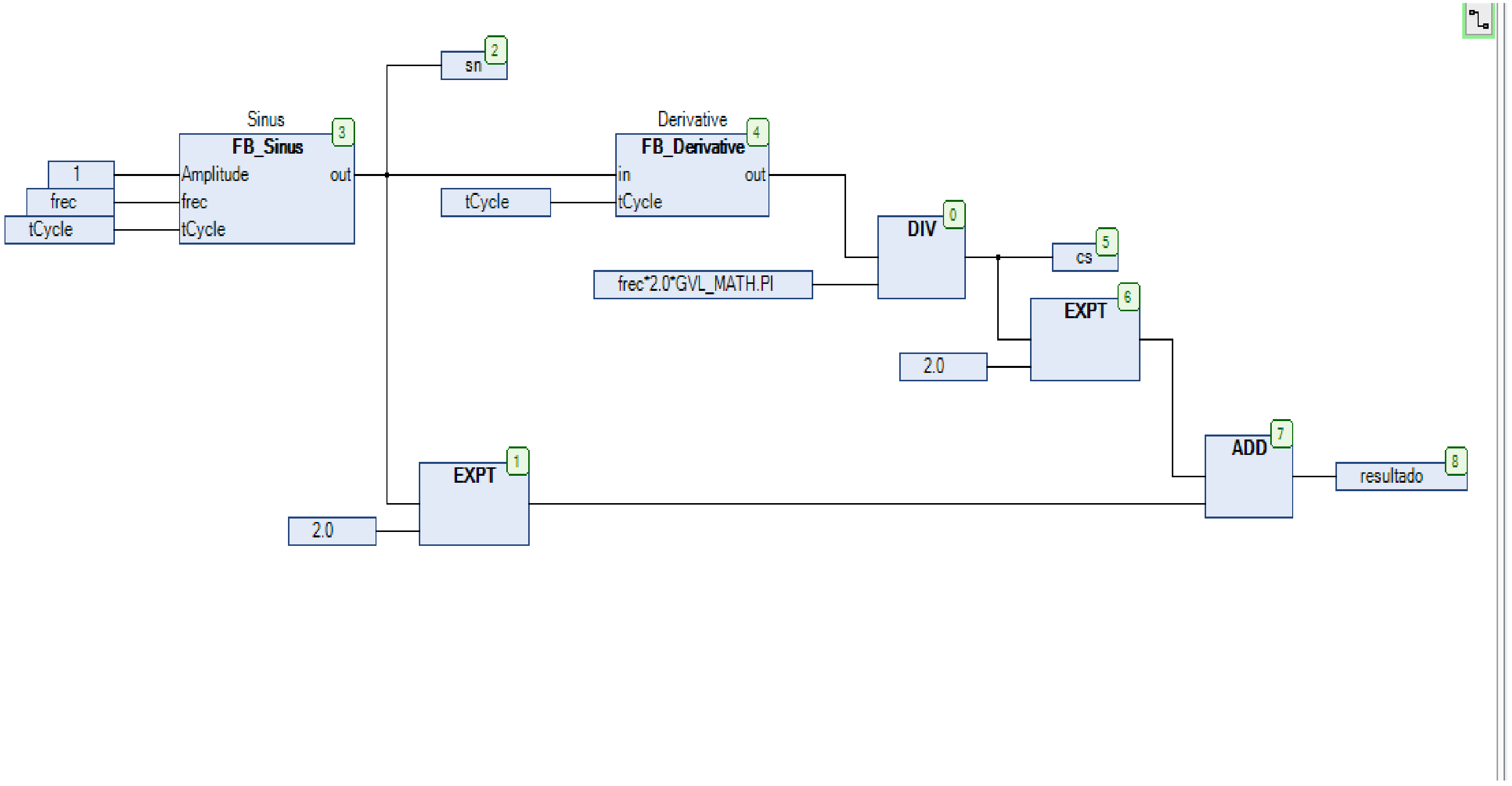
$$\cos^2(wt) + \sin^2(wt) = 1$$

Podemos encontrar un sistema que nos dé información sobre la bondad del algoritmo. La suma de la salida del generador senoidal al cuadrado y la del coseno al cuadrado debe ser 1.

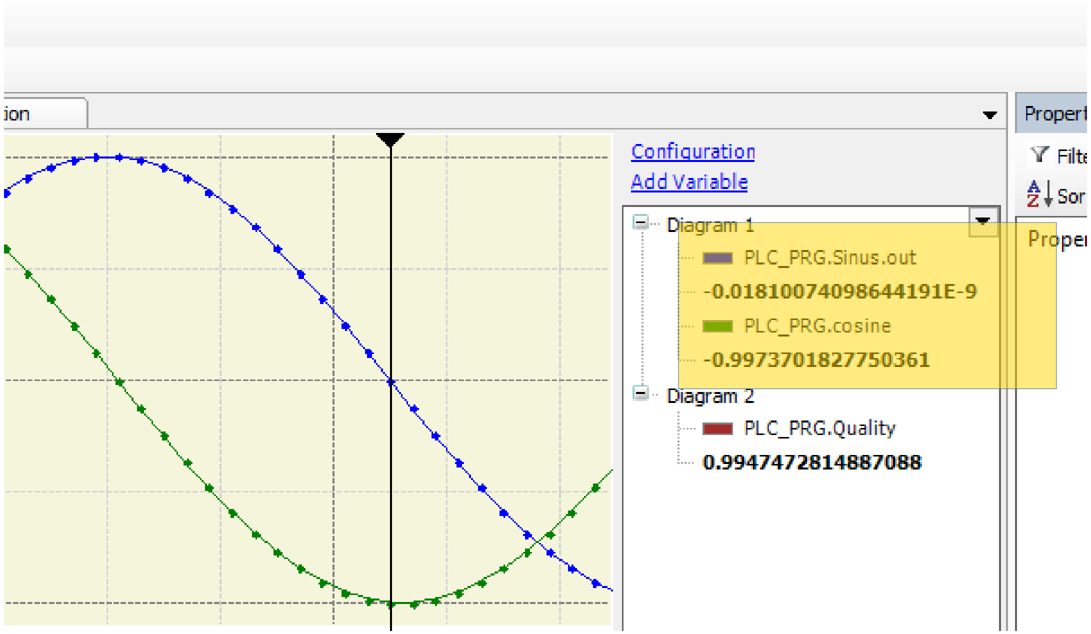
$$\boxed{\sin^2(wt) + (f'(\sin(wt))/w)^2 = 1}$$

Derivada de una señal mediante diferencias finitas

Quedando en el código de la comprobación mediante la relación Pitagórica de la siguiente forma:



Retraso de fase o *'Phase lag'*



Como podemos observar en el dibujo, la señal cosenoidal va retrasada unos 4º respecto a la señal sinusoidal original que equivaldrían a 1ms, la mitad del tiempo de ciclo de tarea. Esto produce un retraso de fase que va en decremento de la estabilidad del sistema.

Suma del cuadrado de un seno y un coseno desfasados

Si el seno estarà desfasado la mitad del ángulo:

$$\sin^2(w+\varphi/2)=(\sin(w)*\cos(\varphi/2)+\cos(w)*\sin(\varphi/2))^2 \Rightarrow$$
$$(\sin^2(w)*\cos^2(\varphi/2)+\cos^2(w)*\sin^2(\varphi/2))+2*\cos(w)*\sin(w)*\cos(\varphi/2)*\sin(\varphi/2)(1)$$

Y el coseno la otra mitad:

$$\cos^2(w-\varphi/2)=(\cos(w)*\cos(-\varphi/2)-\sin(w)*\sin(-\varphi/2))^2 \Rightarrow$$
$$(\cos^2(w)*\cos^2(-\varphi/2)+\sin^2(w)*\sin^2(-\varphi/2))-2*\cos(w)*\sin(w)*\cos(-\varphi/2)*\sin(-\varphi/2)(2)$$

Si sumamos 1 y 2

$$\cos^2(w-\varphi/2)+\sin^2(w+\varphi/2)(3)$$

$$\cos^2(w)*(\cos^2(-\varphi/2)+\sin^2(\varphi/2))+\sin^2(w)*(\sin^2(-\varphi/2)+\cos^2(\varphi/2))+\square$$
$$\square+2*\sin(w)*\cos(w)*(\cos(\varphi/2)*\sin(\varphi/2)-\cos(-\varphi/2)*\sin(-\varphi/2))=\square$$

$$\cos^2(w)+\sin^2(w)+4*\sin(w)*\cos(w)*(\cos(\varphi/2)*\sin(\varphi/2))=\square$$
$$1+4*\sin(2w)/2*(\sin(\varphi)/2)=\sin(\varphi)*\sin(2w)$$

$$\boxed{\sin^2(w+\varphi/2)+\cos^2(w-\varphi/2)=1+\sin(\varphi)*\sin(2w)(5)}$$

La suma del cuadrado de una función seno y una coseno desfasadas fi es una función centrada en uno mas una parte pulsante de frecuencia doble y amplitud sin(fi)

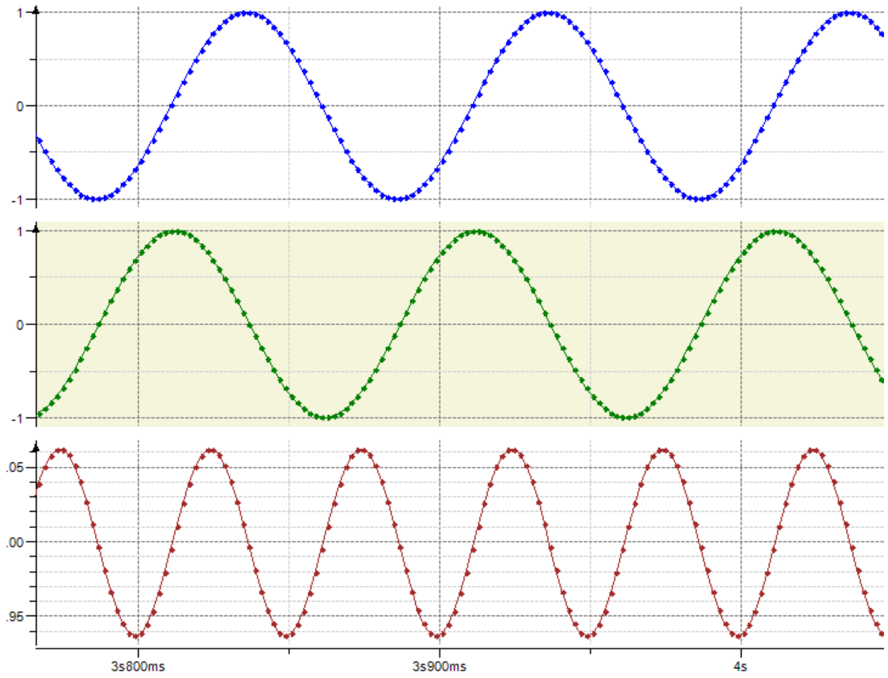
Suma del cuadrado de un seno y un coseno desfasados

Podemos observar el resultado en la siguiente gràfica, siendo:

Curva azul: Seno

Curva verde: coseno

Curva marrón: Señal resultante de la suma del cuadrado de las dos señales:



Vemos que la suma de los cuadrados, es uno más una señal sinusoidal del doble de frecuencia de la original y de amplitud 0.06

Señales desfasadas

Sabemos que la pulsación está causada por el hecho que las dos señales no están desfasadas 90º si no algo más.

Se deduce que la suma de una función seno y una coseno elevadas al cuadrado resulta en:

$$\sin^2(w+\varphi/2)+\cos^2(w-\varphi/2)=1+\sin(\varphi)*\sin(2w)(5)$$

Por tanto, el ángulo de desfase en nuestro ejemplo, si la amplitud es 0.06 es:

$$\sin(\varphi)=0.06 \Rightarrow \varphi=asin(0.06)\Rightarrow \varphi=3{,}44^{o}$$

Que, traducido en tiempo, sabiendo que el periodo en nuestro ejemplo es 0.1s, es:

$$\boxed{T=3{,}44^{o}/360^{o}*0.1\,s=0.001\,s}$$

Que equivale a la mitad del tiempo de ciclo de tarea.

Conclusiones:

- El tiempo de ciclo es un factor determinante en el cálculo de la derivada de una señal respecto al tiempo.

- Aumentando el tiempo de ciclo se reduce el error causado por la resolución y el ruido.

- El aumento del tiempo de ciclo, produce un aumento en el retraso de fase inestabilizando el sistema.

- Un sistema de captación de alta resolución y poco ruidoso como es el encóder de INVANCE de 23 bits mejora la respuesta del sistema en cuando a precisión y estabilidad.

FIN

Josep M. Rams Pinyol
jm-rams@tem-sl.com